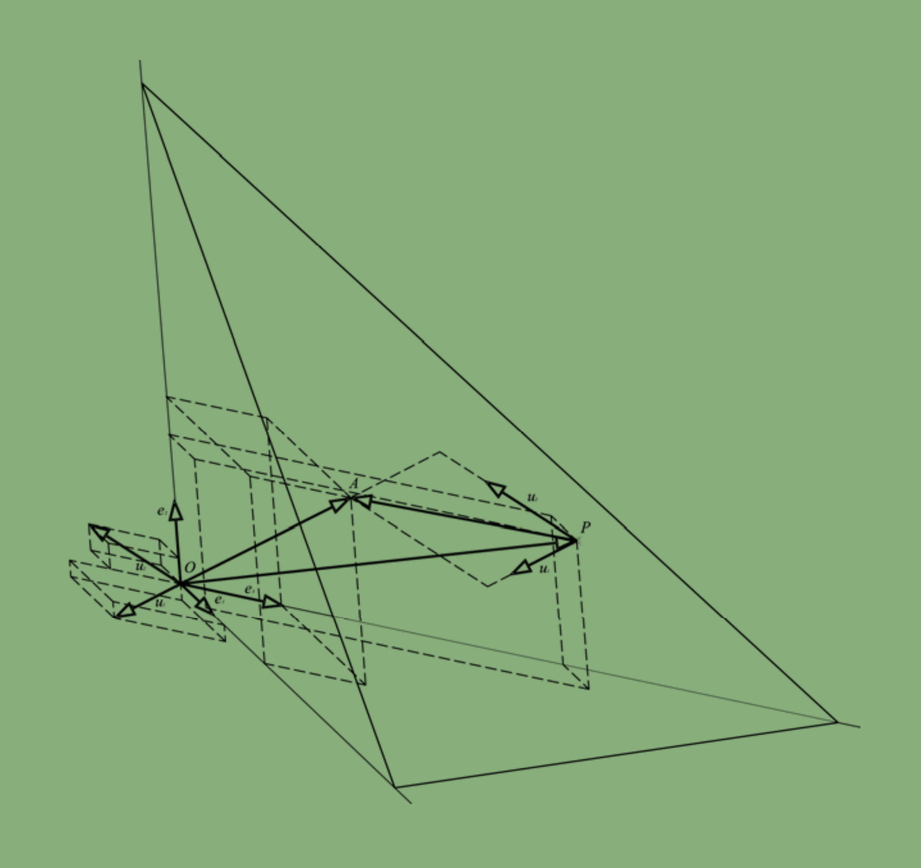
# ESPACIO AFÍN

*por*

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO




**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
***ARQUITECTURA***
***DE MADRID***

**3-47-04**

# ESPACIO AFÍN

*por*

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO

**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
**DE LA *ESCUELA DE***
***ARQUITECTURA***
***DE MADRID***

**3-47-04**

C U A D E R N O S
D E L  I N S T I T U T O
J U A N  D E  H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

***Espacio afín.***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 414.01 / 3-47-04
ISBN-13: 978-84-9728-480-6
Depósito Legal: M-29019-2013

## ÍNDICE

**Def 1:** **Espacio afín:**

Se llama espacio afín sobre un cuerpo $K$ a un par $(A,V)$, donde $A$ es un conjunto cuyos elementos llamamos puntos y $V$ un espacio vectorial. Sobre ellos se define una aplicación:

$$V \times A \xrightarrow{+} A$$
$$(u,P) \to Q = P + u$$

que llamamos acción $V$ sobre $A$ que verifica:

1º.

$$\left.\begin{array}{l}\forall u,v \in V \\ \text{y} \\ \forall P \in A\end{array}\right\}, \text{se verifica}: (P+u)+v = P+(u+v)$$

2º.

$\forall P,Q \in A, \exists! u \in V / \quad P + u = Q$

Al vector $u$ se le representa por $\overline{PQ}$ y es único, $\overline{PQ} = u$.

- Representamos los puntos con letras mayúsculas latinas
- Se llama dimensión de $A$ a la dimensión de $V$.

***Ejemplo 1:***

*Sea $V_2$ el conjunto de los vectores libres en el plano definidos sobre el cuerpo de los números reales y $A_2$ el conjunto de los puntos en el plano ordinario, en $A_2$ definimos una aplicación +, que asocia a un punto $P$ del plano y a un vector $u$, un solo punto $Q$, de modo que $\overline{PQ}$ es un representante del vector $u \in V_2$. Se deduce que **el plano ordinario es un espacio afín asociado al espacio vectorial de los vectores libres de dimensión 2**: De acuerdo con las propiedades estudiadas en el conjunto de los vectores libres:*

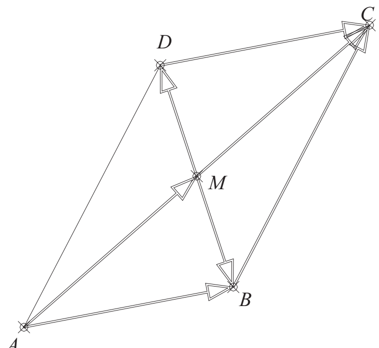
- *Dos puntos arbitrarios $P,Q$ definen un único vector libre que representamos por $\overline{PQ}$.*
- *Sea $P$ un punto arbitrario de $A_2$, sean $u = \overline{PQ}$ y $v = \overline{QR}$ dos vectores libres arbitrarios:*

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{c}Q = P+u \\ \text{y} \\ R = Q+v\end{array}\right\} \Rightarrow R = (P+u)+v \\ \text{como } PQR \text{ es un triángulo, } \overline{PR} = u+v \Rightarrow R = P+(u+v)\end{array}\right\} \Rightarrow (P+u)+v = P+(u+v)$$

*En el plano afín $A_2$ definido en el apartado anterior se pueden demostrar propiedades geométricas de los polígonos aplicando las propiedades de los vectores libres:*

***Ejemplo 2:***

*En el plano afín ordinario demostrar que las **diagonales de un paralelogramo se cortan el punto medio:***



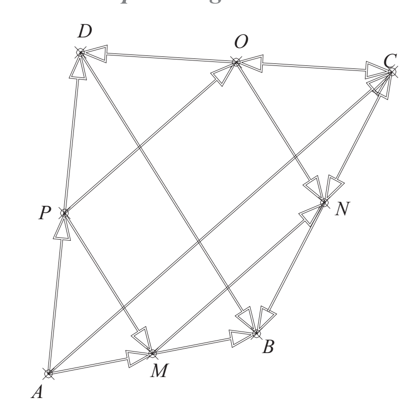
*Sea $M$ el punto medio de una diagonal la $\overline{AC}$, veamos que coincide con el punto medio de la otra diagonal, la $\overline{BD}$:*

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\overline{MD}+\overline{DC}=\overline{MC}\\ \text{al ser } M \text{ el punto medio de } \overline{AC}: \overline{MC}=\overline{AM}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{MD}+\overline{DC}=\overline{AM}\\ \left.\begin{array}{r}\overline{AM}+\overline{MB}=\overline{AB}\\ \text{al ser un paralelogramo}: \overline{AB}=\overline{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{AM}+\overline{MB}=\overline{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{MD}+\overline{DC}+\overline{MB}=\overline{DC}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overline{MD}+\overline{MB}=\overline{0}\Leftrightarrow \overline{MD}=-\overline{MB}\Leftrightarrow M$ es el punto medio de $\overline{BD}\Leftrightarrow$ las diagonales se cortan en su punto medio.

***Ejemplo 3:***

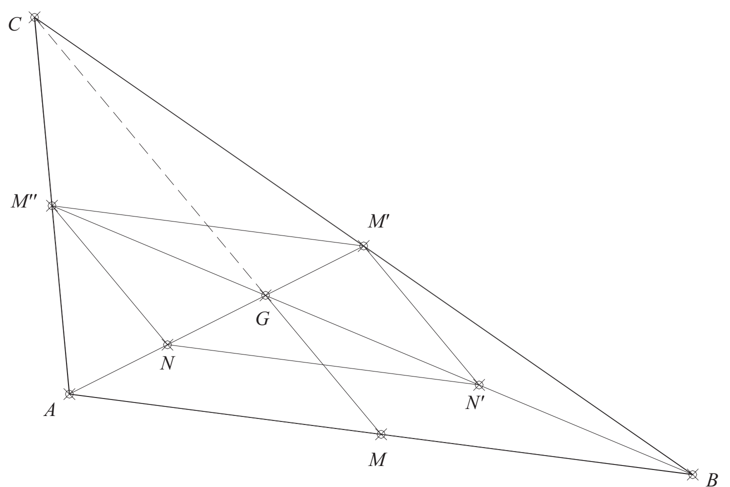
*Demostrar* ***que en un cuadrilátero cualquiera si se unen los puntos medios de los lados consecutivos mediante segmentos se obtiene un paralelogramo****.*




$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}\\ \overline{MB}+\overline{BN}=\dfrac{\overline{AB}}{2}+\dfrac{\overline{BC}}{2}=\overline{MN}\\ \overline{PD}+\overline{DO}=\dfrac{\overline{AD}}{2}+\dfrac{\overline{DC}}{2}=\overline{PO}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{MN} \text{ y } \overline{PO} \text{ son paralelos}\\ \left.\begin{array}{l}\overline{AB}-\overline{AD}=\overline{DB}=\overline{CB}-\overline{CD}\\ \overline{AM}-\overline{AP}=\dfrac{\overline{AB}}{2}-\dfrac{\overline{AD}}{2}=\overline{PM}\\ \overline{CN}-\overline{CO}=\dfrac{\overline{CB}}{2}-\dfrac{\overline{CD}}{2}=\overline{ON}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{PM} \text{ y } \overline{ON} \text{ son paralelos}\end{array}\right\}\Rightarrow MNOP \text{ es un paralelogramo.}$$

***Ejemplo 4:***

*Como aplicación de la propiedad anterior, sabiendo que el baricentro de un triángulo es el punto de corte de las medianas (rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto), demostrar que:* ***el baricentro está situado sobre cada una de las medianas a un tercio del lado y dos tercios del vértice****.*




*Construimos un cuadrilátero* $NN'M'M''$ *uniendo los puntos medios de los segmentos* $AG$ *y* $GB$ *y los pies de las medianas* $BM''$ *y* $AM'$*, es un paralelogramo:*

$$\left.\begin{array}{r}\text{Considerando el triángulo } AGB \text{ se verifica : } \overline{NN'} = \dfrac{\overline{AB}}{2} \\ \text{Considerando el triángulo } ACB \text{ se verifica : } \overline{M''M'} = \dfrac{\overline{AB}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{NN'} = \overline{M''M'} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \text{NN'M'M'' es un pralelogramo y por tanto : } \overline{NG} = \overline{GM'} \\ \text{al ser } N \text{ el punto medio de } \overline{AG} \Rightarrow \overline{AN} = \overline{NG}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AG} = 2\overline{GM'}$$ *análogamente:*

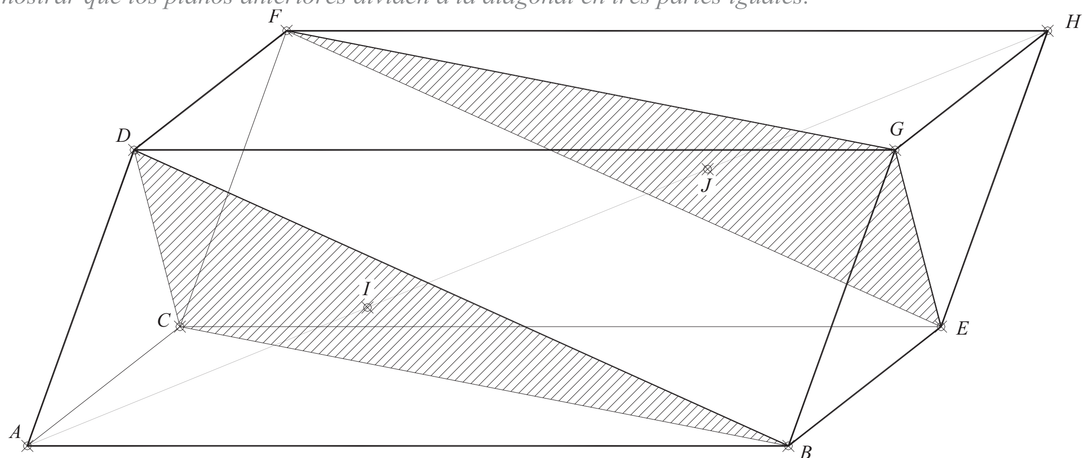
$$\left.\begin{array}{r}NN'M'M'' \text{ es un pralelogramo y por tanto : } \overline{N'G} = \overline{GM''} \\ \text{al ser } N \text{ el punto medio de } \overline{BG} \Rightarrow \overline{BN} = \overline{N'G}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BG} = 2\overline{GM''}$$

*Por otra parte, la tercera mediana, considerando el triángulo* $ABC$*, divide el segmento* $M'M''$ *en su punto medio pasa también por* $G$*.*

*Del mismo modo en el espacio ordinario* $A_3$ *que es un espacio afín asociado al espacio vectorial de los vectores libres de dimensión tres* $V_3$ *se pueden demostrar propiedades geométricas de los poliedros.*

***Ejercicio 1.:***

*Utilizando los resultados anteriores (en el plano), demostrar que la diagonal de un paralelogramo corta a los dos planos que pasan por los tres vértices contiguos a cada uno de los extremos de la diagonal en los baricentros de los triángulos que determinan las caras del paralelogramo sobre dichos planos. Demostrar que los planos anteriores dividen a la diagonal en tres partes iguales.*



**Propiedades:**

P-1. $\forall P,Q \in A, \overline{PQ}=0 \Rightarrow P=Q$.

**Demostración:**

a)

$$\left.\begin{array}{l} P+\overline{PQ}=Q \\ \overline{PQ}=0 \end{array}\right\}(\text{por } 2) \Rightarrow P=Q$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} P=Q\,(\text{por } 2) \Rightarrow P+\underline{0}=Q \\ \text{es único por } 3 \Rightarrow P+\overline{PQ}=Q \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PQ}=\underline{0}$$

P-2. $\forall P,Q,R \in A, \overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$

**Demostración:**

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} P+\overline{PQ}=Q \\ \text{y} \\ Q+\overline{QR}=R \end{array}\right\} \Leftrightarrow (P+\overline{PQ})+\overline{QR}=R \Leftarrow (\text{por } 1) \Rightarrow P+(\overline{PQ}+\overline{QR})=R \\ \text{por } 3 \text{ es único} \Rightarrow P+\overline{PR}=R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overline{PQ}+\overline{QR}=\overline{PR}$$

P-3. $\forall P,Q \in A, \overline{PQ}=-\overline{QP}$

**Demostración:**

$$\left.\begin{array}{l} (\text{P - 2})\ \overline{PQ}+\overline{QP}=\overline{PP} \\ (\text{P - 1})\ \overline{PP}=\underline{0} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overline{\text{PQ}}+\overline{QP}=\underline{0} \Rightarrow \overline{PQ}=-\overline{QP}$$

- Dado un cuerpo $K$ sea el conjunto $K^n$ y el espacio vectorial $K^n$, si definimos la acción de $K^n$ sobre $K^n$ como:

$$K^n \times K^n \xrightarrow{+} K^n$$

$$((\alpha_1,\alpha_2.....\alpha_n),(\beta_1,\beta_2....\beta_n)) \to (\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2....\alpha_n+\beta_n)$$

entonces $(K^n,K^n)$ es un espacio afín que representaremos como $K^n$.

Los elementos de $K^n$ se consideran como puntos o vectores indistintamente.

***Ejemplo 5:***

***Las soluciones de un sistema lineal de ecuaciones no homogéneo es un subespacio afín.***

*Consideremos el sistema de ecuaciones* $A\cdot X=B$*, el conjunto solución del sistema lo podremos escribir de la forma:* $X=\alpha+u$*, donde* $u$ *es la solución del sistema homogéneo* $A\cdot X=0$*, en efecto:*

*se verifica:* $\left.\begin{array}{r} A\cdot(\alpha+u)=B \Leftrightarrow A\cdot\alpha+A\cdot u=B \\ \text{si } A.u=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\cdot\alpha=B$ *y* $\alpha$ *es una solución particular del sistema, luego el conjunto solución del sistema no homogéneo se puede escribir como la suma de una solución particular y la solución del sistema homogéneo* $A\cdot X=0$.

*El conjunto las soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo es un espacio vectorial y por lo tanto el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo* $A\cdot X=B$ *tiene estructura de espacio afín, cuyo espacio vectorial asociado es el conjunto solución del sistema homogéneo que se obtiene eliminando los términos independientes en el sistema dado.*

- Conocido un punto $P \in A$ y el espacio vectorial asociado $V$ queda determinado el espacio afín. Basta con ver que dado un punto cualquiera $P \in A$, por el axioma 3, $\exists! u \in V / \overline{PQ} = u \in V \Rightarrow P + u = Q$

**Def 2:**

Se llama **determinación lineal del espacio afín** al conjunto $(P,V)$ con $P \in A$.

$$A = P + V = \{X \in A / \overline{XP} \in V\}$$

- Para determinar el espacio $V$ basta con conocer una base $B_V$ del mismo, $V = L(B_V)$ La determinación lineal del espacio afín se puede escribir: $(P, L(B_V))$, es decir que :

$A = P + L(B_V)$, acción del espacio generado por $B_V$ sobre $P$.

***Ejemplo 6:***

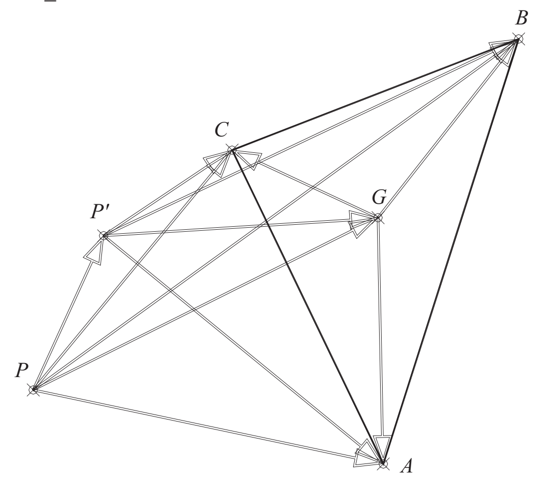
*En $A_2$, si conocemos un punto $P$ y dos vectores libres $u$ y $v$ no colineales (una base), los vectores $w \in V_2$ son tales que $w = \alpha u + \beta v$ por ser $V_2 = L(u,v)$, los puntos del plano $X \in A_2$ serán:*

$$X = P + w = P + (\alpha u + \beta v)$$

X
w=αu+βv
βv
v
au
u
P

***Ejemplo 7:***

***Sea un triángulo cualquiera de vértices $A$, $B$ y $C$, demostrar que existe un solo punto $G$ del plano tal que: $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \underline{0}$.***



*Refiriendo a un punto* $P$ *:*

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overline{GA}=\overline{PA}-\overline{PG}\\ \overline{GB}=\overline{PB}-\overline{PG}\\ \overline{GC}=\overline{PC}-\overline{PG}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}-3\overline{PG}\\ \text{Se verifica}:\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}=\underline{0}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{PG}=\frac{1}{3}(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$$

*Relación que sitúa el punto* $G$ *.*

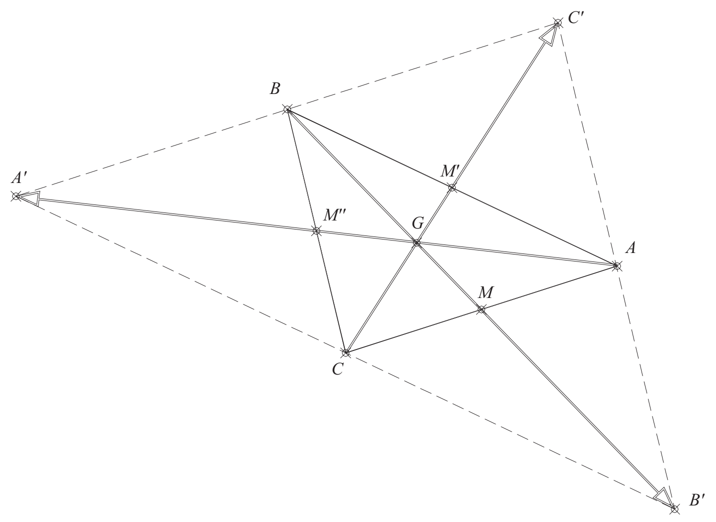
*El punto es único, no depende del punto* $P$ *elegido, si referimos a otro punto* $P'$ *se verifica:* $\frac{1}{3}(\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C})=\overline{P'G'}$*, además sabemos:*

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\overline{P'A}=\overline{P'P}+\overline{PA}\\ \overline{P'B}=\overline{P'P}+\overline{PB}\\ \overline{P'C}=\overline{P'P}+\overline{PC}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{P'G'}=\frac{1}{3}(\overline{P'P}+\overline{P'P}+\overline{P'P}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})\\ \frac{1}{3}(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})=\overline{PG}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{P'G'}=\overline{P'P}+\overline{PG}\\ \overline{P'G'}=\overline{P'P}+\overline{PG'}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{PG}=\overline{PG'}\Rightarrow G=G'$ *Además para todo punto* $P$ *del plano se verifica:* $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=3\overline{PG}$

***Ejemplo 8:***

*Demostrar que dicho punto* $G$ ***es el baricentro del triangulo*** *(punto de corte de las medianas)* ***y*** *que, como se ha demostrado,* ***está situado a un tercio del lado y dos tercios del vértice sobre cada una de las medianas.***




*En el apartado anterior hemos visto que la situación de* $G$ *es tal que:*

$\overline{PG}=\frac{1}{3}(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC})$ *haciendo coincidir* $P$ *y* $A$ *resulta:*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AG}=\frac{1}{3}(\overline{AA}+\overline{AB}+\overline{AC})=\frac{1}{3}(\overline{AB}+\overline{AC})\Rightarrow 3\overline{AG}=\overline{AB}+\overline{AC}\\ \text{Al ser } ABA'C \text{ un paralelogramo}:\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AA'}=2\overline{AM''}\end{array}\right\}\Rightarrow -3\overline{GA}=2\overline{AM''}\Rightarrow 3\overline{GA}+2\overline{AM''}=0$$

*Haciendo coincidir* $P$ *y* $B$ *resulta:*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BG}=\frac{1}{3}(\overline{BA}+\overline{BB}+\overline{BC})=\frac{1}{3}(\overline{BA}+\overline{BC})\Rightarrow 3\overline{BG}=\overline{BA}+\overline{BC}\\ \text{Al ser } BAB'C \text{ un paralelogramo}: \overline{BA}+\overline{BC}=\overline{BB'}=2\overline{BM}\end{array}\right\}\Rightarrow -3\overline{GB}=2\overline{BM}\Rightarrow 3\overline{GB}+2\overline{BM}=0$$

*Haciendo coincidir $P$ y $C$ resulta:*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{CG}=\frac{1}{3}(\overline{CA}+\overline{CB}+\overline{CC})=\frac{1}{3}(\overline{CA}+\overline{CB})\Rightarrow 3\overline{CG}=\overline{CA}+\overline{CB}\\ \text{Al ser } CBC'B \text{ un paralelogramo}: \overline{CB}+\overline{CB}=\overline{CC'}=2\overline{CM'}\end{array}\right\}\Rightarrow -3\overline{GC}=2\overline{CM}\Rightarrow 3\overline{GC}+2\overline{CM'}=0$$

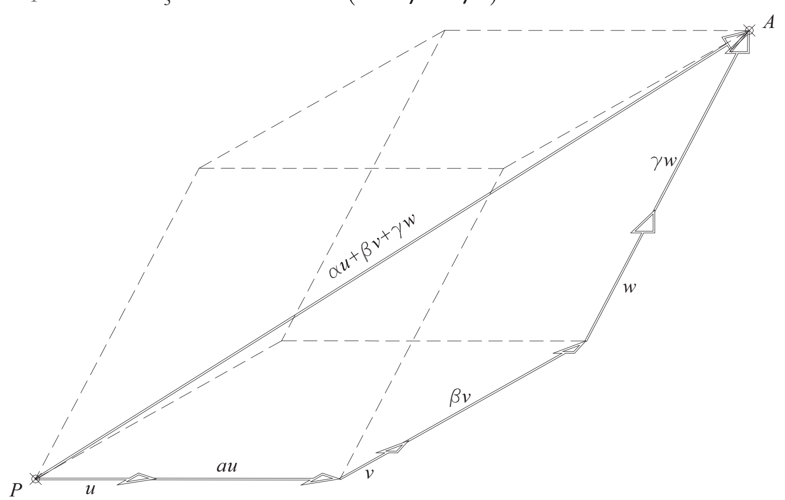
*Luego el punto $G$ está situado sobre cada una de las medianas a un tercio del lado y dos tercios del vértice, es el baricentro del triángulo.*

***Ejercicio 2.:***

*De un modo análogo se demuestra que para un conjunto de cuatro puntos no alineados en el plano existe un único punto $G$ que verifica: $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\underline{0}$ y queda definido por la relación:* $\frac{1}{4}(\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD})=\overline{PG}$

***Ejemplo 9:***

*De un modo análogo en el espacio tridimensional $A_3$ si conocemos un punto $P$ y tres vectores libres $u$, $v$ y $w$ no coplanarios (una base), los vectores $t\in V_2$ son tales que $t=\alpha u+\beta v+\gamma w$ por ser $V_3=L(u,v,w)$, puntos del plano $A\in A_3$ serán:* $A=P+(\alpha u+\beta v+\gamma w)$

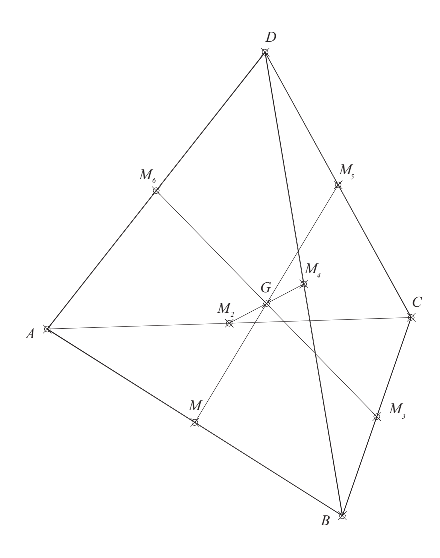



***Ejercicio 3.:***

*Demostrar que en un tetraedro de vértices $A,B,C$ y $D$ existe un único punto $G$ que verifica:* $\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\underline{0}$.

***Ejercicio 4.:***

*Demostrar que los puntos medios de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de un tetraedro son coincidentes y que es el punto $G$ del apartado anterior.*




- En un espacio afín $A$ elegido un sistema arbitrario de puntos $\{A_0, A_i, A_2, .......A_m\}$ y unos escalares $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ............\lambda_m$ tales que $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$, elegido un punto $P$, el vector $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i}$ no depende del punto $P$ elegido:

  Si elegimos otro punto $P'$ se verificará $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{P'A_i}$ y

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{P'A_i} - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (\overline{P'A_i} - \overline{PA_i}) \\ \text{Por la propiedad triangular : } \overline{P'A_i} - \overline{PA_i} = \overline{PP'} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{P'A_i} - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PP'} \\ \text{Se cumple : } \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{P'A_i} - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i} = \bar{0} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{P'A_i} = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i}$$

**<u>Def 3:</u> Baricentro.**

Podemos encontrar un punto $G$ definido por: $\overline{PG} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i}$, con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = \lambda \neq 0$, ó lo que es igual: $G = P + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i}$ que no depende del punto $P$ elegido y que llamamos baricentro de $(A_i, \lambda_i)$.

Lo representamos por $\frac{1}{\lambda}(\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ............ + \lambda_m A_m) = P + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overline{PA_i}$.

- El baricentro se corresponde con el centro de gravedad de $A_i$ puntos con masas $\lambda_i$.
- Si hacemos $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = ............ = \lambda_m$ la definición coincide con las dadas en los ejemplos anteriores en el plano y el espacio afín ordinarios.

- **Otra definición de espacio afín:**

**<u>Def . 4:</u>**

Un espacio afín sobre un cuerpo $K$ es conjunto $A$ cuyos elementos llamamos puntos y designamos por letras mayúsculas latinas, un espacio vectorial $V$ y una aplicación:

$$\varphi : A\times A \longrightarrow V$$
$$(P,Q)\rightarrow \varphi(P,Q)=\overline{PQ}$$

1. Fijado un punto $P\in A$, es una biyección.
2. $\forall P,Q,R\in A, \varphi(P,Q)+\varphi(Q,R)=\varphi(P,R)$

*Ejercicio 5.:*

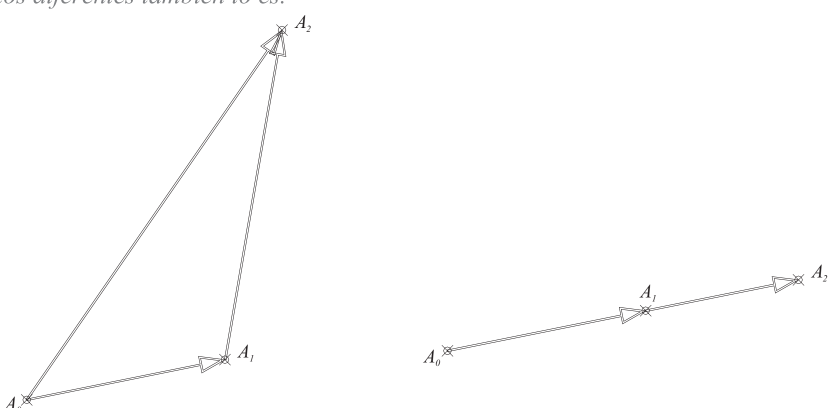
*Demostrar que las dos definiciones de espacio afín dadas son equivalentes.*

**Def .5: Dependencia afín:**

Se dice que un sistema de puntos $\{A_0, A_1, A_2 ..... A_n\}$ es afinmente $\begin{Bmatrix}\text{independiente}\\ \text{dependiente}\end{Bmatrix}$ si el sistema de vectores que se obtiene tomando uno de los puntos como origen y los otros como extremos: $\{\overline{A_0A_1}, \overline{A_0A_2}, \overline{A_0A_3} .......... \overline{A_0A_n}\}$ es un sistema $\begin{Bmatrix}\text{libre}\\ \text{ligado}\end{Bmatrix}$.

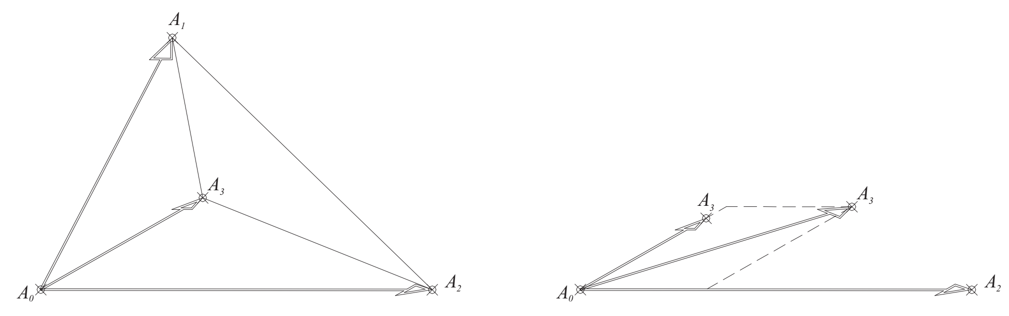
*Ejemplo 10:*

*En el plano afín ordinario los tres vértices de un triángulo son un sistema de puntos afinmente independientes y tres puntos alineados son un sistema de puntos afinmente dependiente, cualquier sistema con mas de tres puntos diferentes también lo es.*




*Ejemplo 11:*

*En el espacio afín ordinario los cuatro vértices de un tetraedro son un sistema de puntos afinmente independientes y cuatro puntos coplanarios son un sistema de puntos afinmente dependiente, cualquier sistema con más de cuatro puntos diferentes también lo es.*



**Def . 6:**

**Subespacio afín:**

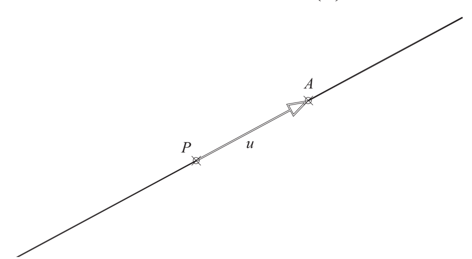
Sea un espacio afín $(A,V)$, un punto $P \in A$ y un subespacio vectorial $L \subset V$, se llama subespacio afín que pasa por $P$ y con dirección de $L$ (o con variedad de dirección $L$) al subconjunto de $A$:

$$S = P + L = \{X \in A \,/\, \overline{XP} \in L\} \subset A \text{ ó } S = P + L = \{P + u \,/\, u \in L\} \subset A$$

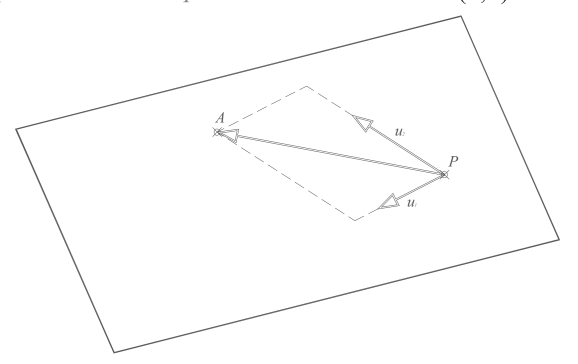
- La dimensión del subespacio afín es la dimensión de $L$.
- Los puntos son subespacios de dimensión es 0.
- Si la dimensión es 1 se llama recta.
- Si la dimensión es *n-1*, siendo *n* la dimensión de $A$ se llama hiperplano. En el plano afín ordinario las rectas son los hiperplanos y en el espacio afín ordinario los planos son los hiperplanos.

***Ejemplo 12:***

*Una recta es el resultado de la acción del subespacio vectorial engendrado por un solo vector* $u$ *sobre un punto* $P$, *en el espacio y en el plano ordinario* $r = P + L(u)$:




*Un plano es el resultado de la acción del subespacio vectorial engendrado por dos vectores* $u$ *y* $v$ *no colineales sobre un punto* $P$, *en el espacio ordinario* $\pi = P + L(u,v)$:




***Ejemplo 13:***

*En el espacio afín* $(R^n, R^n)$ *consideremos un sistema de ecuaciones:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; AX = B$$

*, si es compatible y* $rg(A) = m$ *la solución será de la forma:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nr} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$$

*,donde* $(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ *es un punto y* $(u_{1i}, u_{2i} \dots u_{ni}), \forall i \in \{1,2 \dots r\}$ *son los*

*vectores que engendran la variedad de dirección del subespacio solución, $r = n - m$ será la dimensión del subespacio, si es compatible determinado la dimensión es 0 y la solución un único punto.*

**Proposición 1:**

Dado un subespacio afín $S = P + L$, la variedad de dirección $L$ queda determinada por $S$. Efectivamente: $L = \{\overline{Q_1Q_2} / Q_1, Q_2 \in S\}$.

***Ejercicio 6:***

*Demostrar que la definición dada para un conjunto de puntos afinmente independientes es equivalente a: se dice que un conjunto de $n+1$ puntos $\{A_0, A_1, A_2 .....A_n\}$ es afinmente independiente si el subespacio que generan tiene dimensión $n$, en caso contrario se dice que son afinmente dependientes.*

**Def. 7:**

**Paralelismo entre subespacios:**

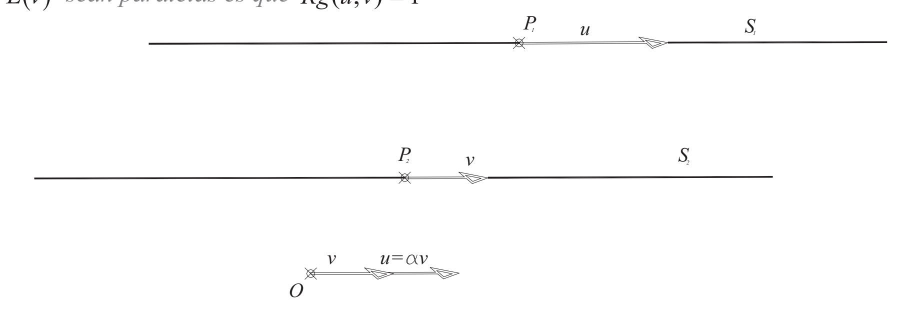
Se dice que dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$ son paralelos si la variedad de dirección de uno está contenida en la variedad de dirección del otro, es decir:

$$L_1 \subset L_2$$
$$ó$$
$$L_2 \subset L_1$$

***Ejemplo 14:***

*En el espacio afín ordinario $A_3$:*

- *La condición necesaria y suficiente para que dos rectas $r_1 = P_1 + L(u)$ y $r_2 = P_2 + L(v)$ sean paralelas es que $Rg(u,v) = 1$*



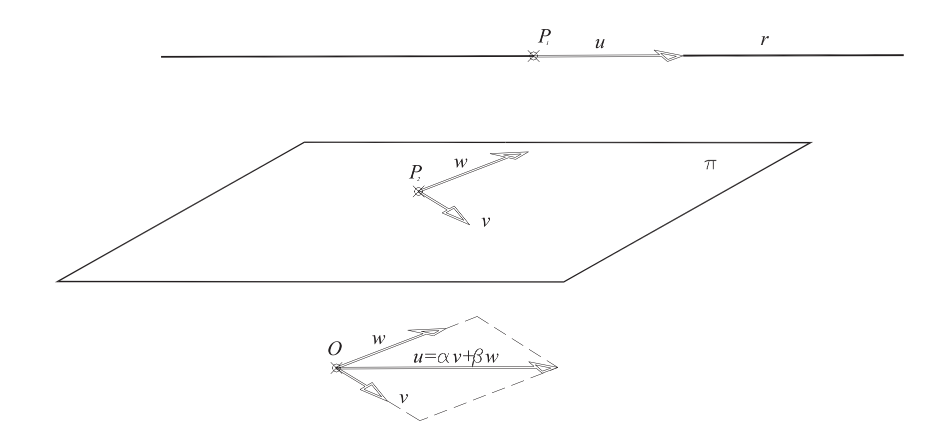

***Demostración:***

*1º. Si $r_1$ y $r_2$ son paralelas se verifica:* $\left.\begin{array}{l} L(u) \subset L(v) \\ \text{o} \\ L(v) \subset L(u) \end{array}\right\} \Rightarrow u = \alpha v \Rightarrow Rg(u,v) = 1$

*2º. Si $Rg(u,v) = 1 \Rightarrow u = \alpha v \Rightarrow L(u) \subset L(v)$ o lo que es igual $u$ y $v$ son colineales, por tanto $r_1$ y $r_2$ son paralelas.*

***Ejemplo 15:***

- *La condición necesaria y suficiente para que una recta $r = P_1 + L(u)$ y un plano $\pi = P_2 + L(v,w)$ sean paralelos es que $Rg(u,v,w) = 2$*



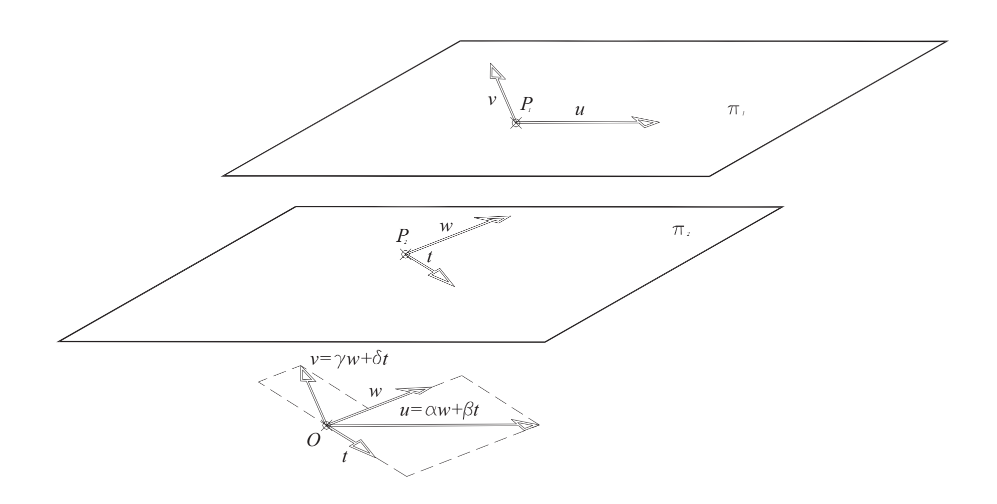

***Demostración:***

*1º:* $v$ *y* $w$ *no son colineales luego* $Rg(v,w)=2$*, si* $r$ *y* $\pi$ *son paralelos se verifica:*
$L(u)\subset L(v,w)\Rightarrow u=\alpha v+\beta w\Rightarrow Rg(u,v,w)=2$

*2º. Si* $Rg(u,v,w)=2\Rightarrow u=\alpha v+\beta w\Rightarrow L(u)\subset L(v,w)$ *o lo que es igual* $u$*,* $v$ *y* $w$ *son coplanarios y por tanto* $r$ *y* $\pi$ *son paralelos.*

***Ejercicio 7:***

*Demostrar:*
*La condición necesaria y suficiente para que dos planos* $\pi_1=P_1+L(u,v)$ *y* $\pi_2=P_2+L(w,t)$ *sean paralelos es que* $Rg(u,v,w,t)=2$.




***Ejemplo 16:***

*En el espacio afín* $\Re^4$ *se dan los subespacios* $S_1=P_1+L(u_1,u_3,u_3)$ *y* $S_2=P_2+L(v_1,v_2)$*, siendo:* $u_1=(-1,1,0,0)$. $u_2=(2,0,1,0)$, $u_3=(-1,0,0,1)$, $P_1=(1,0,0,0)$, $v_1=(1,1,1,0)$, $v_2=(1,0,1,1)$ *y* $P_2=(1,0,0,-\frac{1}{2})$, *comprobar que son paralelos:*

$Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$, *la dimensión de* $S_1$ *es tres,* $Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$, *la dimensión* $S_2$ *de es dos,*

$Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow L(v_1, v_2) \subset L(u_1, u_2, u_3) \Rightarrow$ $S_1$ *y* $S_2$ *son paralelos.*

**Proposición 2:**

Si dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$ son paralelos y la intersección no es el vacío, uno está contenido en el otro.

**Demostración:**

Supongamos que $\dim(L_1) \le \dim(L_2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Son paralelos} \Rightarrow L_1 \subset L_2 \\ \text{Sea } P \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow \begin{cases} P \in S_1 \Leftrightarrow S_1 = P + L_1 \\ y \\ P \in S_2 \Leftrightarrow S_2 = P + L_2 \end{cases} \end{array}\right\} \Leftrightarrow P + L_1 \subset P + L_2$$

Luego: $S_1 \subset S_2$

**Corolario:**

- Sean $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$ dos subespacios afines tales que $\dim(L_1) \le \dim(L_2)$ y además verifica $S_1 \cap S_2 = \Phi$, entonces para todo punto $C$ de $S_2$ el subespacio afín que pasa por $C$ y tiene dirección de $L_1$ está contenido en $S_2$: $C + L_1 \subset S_2$

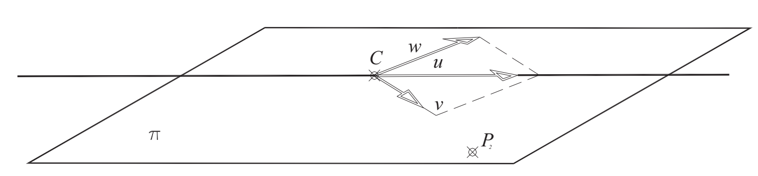
***Ejemplo 17:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$ *sea una recta* $r = P_1 + L(u)$ *y un plano* $\pi = P_2 + L(v, w)$ *paralelos, si* $P_1 \in \pi$*, entonces* $r \subset \pi$.

***Demostración:***

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \text{Si } r \text{ y } \pi \text{ son paralelos} \Leftrightarrow L(u) \subset L(v,w) \Rightarrow u = \alpha v + \beta w \\ \text{Los puntos de la recta son: } X = P_1 + \lambda u \end{array}\right\} \Rightarrow X = P_1 + \lambda(\alpha v + \beta w) \\ \text{y si } P_1 \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow X \in \pi \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow r \subset \pi$



***Ejemplo 18*:**

*Hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para que una recta* $r = P_1 + L(u)$ *y un plano* $\pi = P_2 + L(v,w)$ *sean paralelos es que* $Rg(u,v,w) = 2$*. Si además se verifica que* $Rg(u,v,w,\overline{P_1P_2}) = 2$*, entonces la recta está contenida en el plano.*

*Efectivamente:*

*1º*

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si } r \text{ y } \pi \text{ son paralelos} \Leftrightarrow L(u) \subset L(v,w) \Rightarrow u = \alpha v + \beta w \\ \text{Si } P_1 \in \pi \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in L(v,w)\end{array}\right\} \Rightarrow Rg(u,v,w,\overline{P_1P_2}) = 2$$

*2º.*

*Si* $Rg(u,v,w,\overline{P_1P_2}) = 2$*, como la recta es paralela al plano se cumple que* $Rg(u,v,w) = 2$ *y el vector* $\overline{P_1P_2}$ *es combinación lineal de los vectores* $v$ *y* $w$*, por tanto son coplanarios y la recta está contenida en el plano.*

*Ejemplo 19*:

*Los subespacios* $S_1, S_2 \in \Re^4$ *del ejercicio 7 son paralelos y* $\dim(S_2) < \dim(S_1)$*, ¿está contenido* $S_2$ *en* $S_1$*?*

$\overline{P_1P_2} = (0,0,0,\frac{1}{2})$*, hemos visto que:* $Rg(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2) = Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ $S_1$,

$$Rg(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,\overline{P_1P_2}) = Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow$$ *son paralelos y* $S_2 \not\subset S_1$.

*Si elegimos un punto arbitrario de* $P_2^{'} \in S_1$, $P_2^{'} = P_2^{'} + \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$ *por ejemplo:* $P_2^{'} = (1,0,0,0) - (-1,1,0,0) + 2(2,0,1,0) + 3(-1,0,0,1) = (3,-1,2,3)$*, el subespacio* $S_2^{'} = P_2^{'} + L(v_1,v_2) \subset S_1$*, efectivamente:*

$$Rg(u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,\overline{P_1P_2^{1}}) = Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

**Proposición 3:**

**Criterio de identidad de subespacios:**

Sean dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$ , $S_1, S_2 \subset A$, son iguales si se verifica: $L_1 = L_2$ y $\begin{cases} P_1 \in S_2 \\ \text{ó} \\ P_2 \in S_1 \end{cases}$.

**Demostración:**

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\forall X \in S_1 \Leftrightarrow \overline{P_1X} \in L_1 \\ \text{Se verifica}: \ \overline{P_1X} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2X} \\ \overline{P_2X} \in L_2 \\ \text{Si se verifica}: \ P_1 \in S_2 \Leftrightarrow \overline{P_1P_2} \in L_2 \\ \text{y también}: \ L_1 = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{P_1X} \in L_2 \Rightarrow X \in S_2 \Rightarrow S_1 \subset S_2 \\ \left.\begin{array}{r}\forall X \in S_2 \Leftrightarrow \overline{P_2X} \in L_2 \\ \text{Se verifica}: \ \overline{P_2X} = \overline{P_2P_1} + \overline{P_1X} \\ \overline{P_1X} \in L_1 \\ \text{Si se verifica}: \ \mathrm{P_s} \in S_1 \Leftrightarrow \overline{P_2P_1} \in L_1 \\ \text{y también}: \ L_1 = L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{P_2X} \in L_1 \Rightarrow X \in S_1 \Rightarrow S_2 \subset S_1 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = S_2$$

***Ejemplo 20:***

*En el espacio afín ordinario $A_3$:*

- *Si dos rectas $r_1 = P_1 + L(u)$ y $r_2 = P_2 + L(v)$ son paralelas y $P_1 \in r_2$, entonces son iguales.*

***Demostración**:*

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{Si } r_1 \text{ y } r_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow L(u) = L(v) \Rightarrow u = \alpha v \\ \text{Los puntos de } r_1 \text{ son}: \ X = P_1 + \lambda u \end{array}\right\} \Rightarrow X = P_1 + \lambda(\alpha v) \\ \text{y si } \ P_1 \in r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow X \in r_2 \Leftrightarrow r_1 \subset r_2$$

*Luego son iguales al ser los dos de dimensión 1.*

***Ejemplo 21:***

- *Hemos demostrado que la condición necesaria y suficiente para que dos rectas $r_1 = P_1 + L(u)$ y $r_2 = P_2 + L(v)$ sean paralelas es que $Rg(u,v) = 1$. Si además se verifica que $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 1$ entonces las rectas son coincidentes.*

*Efectivamente:*

*1º.* $$\left.\begin{array}{r}\text{Si } r_1 \text{ y } r_2 \text{ son paralelas} \Leftrightarrow L(u) = L(v) \Rightarrow u = \alpha v \\ \text{Si } \ P_1 \in r_2 \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in L(v) = L(u) \end{array}\right\} \Rightarrow Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 1$$

*2º. Si* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 1 \Rightarrow \overline{P_1P_2} = \beta u = \alpha v \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in L(u) = L(v)$ *o lo que es igual $u$, $v$ y $\overline{P_1P_2}$ son colineales, luego $r_1$ y $r_2$ son coincidentes.*

***Ejercicio 8:***

*Demostrar:*

*Sabiendo que la condición necesaria y suficiente para que dos plano $\pi_1 = P_1 + L(u,v)$ y $\pi_2 = P_2 + L(w,t)$ sean paralelos es que $Rg(u,v,w,t) = 2$, que si además se verifica que $Rg(u,v,w,t,\overline{P_1P_2}) = 2$, entonces los planos son coincidentes.*

**Def. 8:**

**Subespacio intersección:**

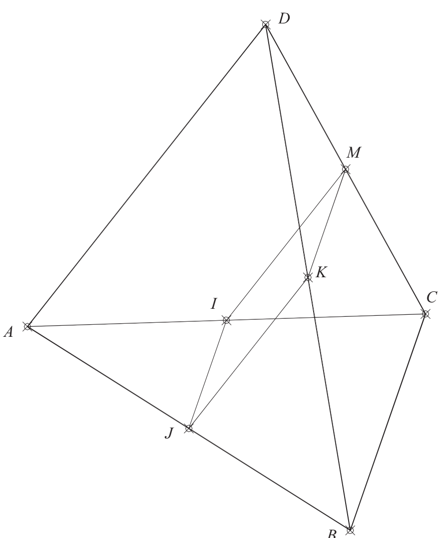
Dada una familia de subespacios afines $S_i = P_i + L_i$, su intersección o es el vacío o es un subespacio afín cuya variedad de dirección es la intersección de las variedades de dirección de los subespacios, es decir: $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = P + \bigcap_{i=1}^{n} L_i$ con $P \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \neq \Phi$

Efectivamente:

- Si $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \Phi$ no hay nada que demostrar.
- Si $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \neq \Phi \Rightarrow \exists P \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, además sabemos que $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ es subespacio vectorial y si $\exists X \in A / \overline{PX} \in \bigcap_{1}^{n} L_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \overline{PX} \in L_i \\ \forall i \in (1,2,3...n) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} X \in S_i \\ \forall i \in (1,2,3...n) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow X \in \bigcap_{1}^{n} S_i$

*Ejercicio 9:*

*En el espacio afín ordinario $A_3$, dado un tetraedro de vértices $A$, $B$, $C$ y $D$ demostrar que el plano que pasa por el punto medio de una aristas y es paralelo a dos aristas opuestas corta a los lados del tetraedro en los puntos medios :*




**Proposición 4:**

Sea un espacio afín y dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$, la condición necesaria y suficiente para que se corten es que $\overline{P_1P_2} \in L_1 + L_2$.

**Demostración:**

- Supongamos que se cortan $\Rightarrow \exists A \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \overline{AP_1} \in L_1 \\ \overline{AP_2} \in L_2 \end{matrix} \right.$
  Por la propiedad triangular : $\overline{P_1P_2} = \overline{AP_2} - \overline{AP_1}$ $\Bigg\} \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in L_1 + L_2$

- Supongamos que: $\overline{P_1P_2} = u + v$ siendo: $\left.\begin{cases} u \in L_1 \\ v \in L_2 \end{cases}\right\}$ Sea un punto $A \in S_1$ tal que: $u = \overline{AP_1}$ $\Rightarrow v = \overline{P_1P_2} - \overline{AP_1}$ Por la propiedad triangular: $\overline{P_1P_2} = \overline{AP_2} - \overline{AP_1} \Leftrightarrow \overline{P_1P_2} + \overline{AP_1}$ $\Rightarrow$

  $\Rightarrow v = -\overline{AP_2} \in L_2 \Rightarrow A \in S_1 \cap S_2$

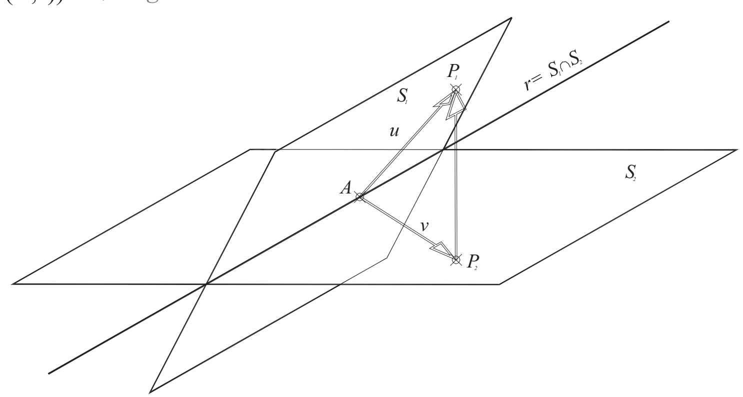
***Ejemplo 22:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$*:*

- *Si dos planos* $\pi_1 = P_1 + L(u,v)$ *y* $\pi_2 = P_2 + L(w,t)$ *no son paralelos se verifica:* $Rg(u,v,w,t) = 3$ *dado que, el rango máximo de un sistema de vectores es la dimensión del espacio al que pertenecen y el espacio* $A_3$ *es de dimensión tres.*

*El vector* $\overline{P_1P_2}$ *pertenece a la suma de las variedades de dirección porque es todo el espacio vectorial:* $L(u,v) + L(w,t) = V_3$ .

*La intersección* $L(u,v) \cap L(w,t) \neq \{\underline{0}\}$ *y por el teorema de la dimensión:* $\dim(L(u,v) \cap L(w,t)) = 1$*, luego se cortan en una recta.*




**Corolario:**

- Si dos subespacios afines tienen variedades de dirección suplementarias existe un único punto que pertenece a la intersección de ambos, es decir se cortan en un punto.

*Ejemplo 23:*

*En el espacio afín* $\Re^4$ *se dan los subespacios* $S_1 = P_1 + L(u_1,u_3)$ *y* $S_2 = P_2 + L(v_1,v_2)$*, siendo:* $u_1 = (-1,1,0,0)$. $u_2 = (2,0,1,0)$, $P_1 = (1,0,0,-1)$, $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1,1)$ *y* $P_2 = (3,1,2,0)$*, si se cortan dar la dimensión de la intersección:*

$Rg\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$*, la dimensión de* $S_1$ *es dos,* $Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$*, la dimensión* $S_2$ *de es dos ,la suma de los subespacios de dirección está engendrada por* $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$*,*

$$Dim\left(L(u_1,u_2)+L(v_1+v_2)\right)=Rg\begin{pmatrix}-1&2&1&1\\1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=3$$ , $\overline{P_1P_2}=(2,1,2,1)$ *y*

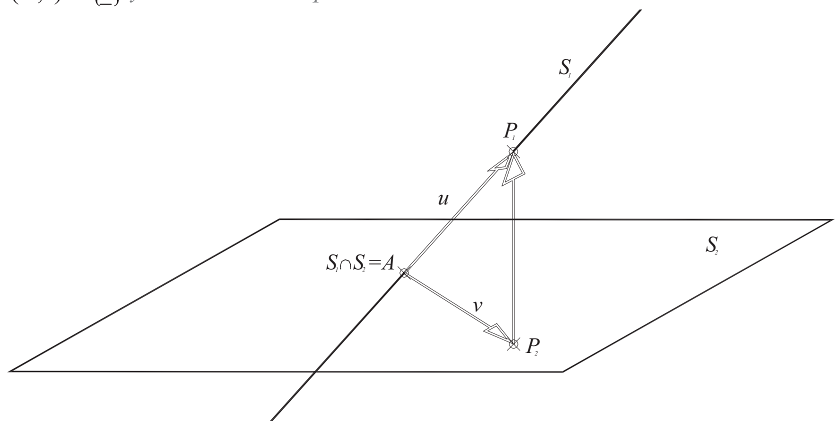
$$Rg\begin{pmatrix}-1&2&1&1&2\\1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}=3\Rightarrow\overline{P_1P_2}\in L(u_1,u_2)+L(v_1,v_2)\Rightarrow$$ $S_1$ *y* $S_2$ *se cortan, por el teorema de la dimensión:*

$Dim\left(L(u_1,u_2)\cap L(v_1,v_2)\right)=1\Rightarrow$ *la dimensión de* $S_1\cap S_2=1$.

***Ejemplo 24:***

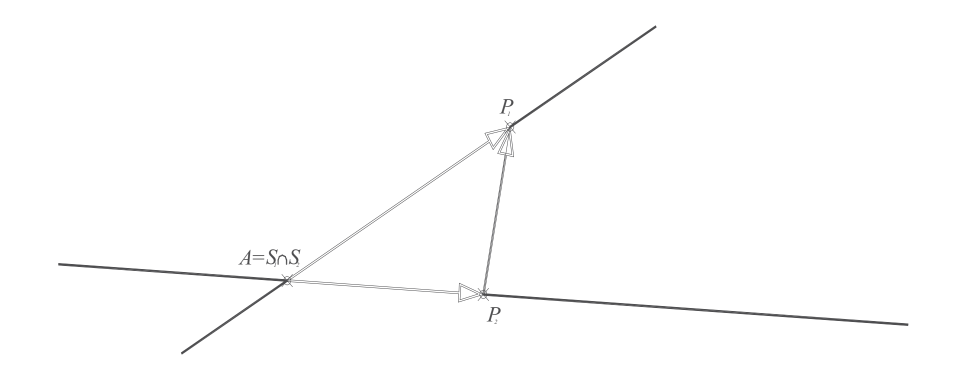
*En el espacio afín ordinario* $A_3$:

- *Si una recta* $r=P_1+L(u)$ *y un plano* $\pi=P_2+L(v,w)$ *no son paralelos se verifica:* $Rg(u,v,w)=3$ *que es el mayor rango posible del sistema, el vector* $\overline{P_1P_2}$ *pertenece a la suma de las variedades de dirección porque es todo el espacio vectorial:* $L(u)+L(v,w)=V_3$ *, pero en este caso los subespacios asociados son suplementarios,* $L(u,v)\cap L(w,t)=\{0\}$ *y se cortan en un punto.*




***Ejemplo 25:***

*Si dos rectas* $r_1=P_1+L(u)$ *y* $r_2=P_2+L(v)$ *no son paralelas* $Rg(u,v)=2$*, la condición necesaria y suficiente para que se corten es que* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2})=2$.



*Demostración*

*1º.: Si* $r_1$ *y* $r_2$ *se cortan son coplanarias y* $\overline{P_1P_2} \in L(u,v) \Rightarrow \overline{P_1P_2} = \beta u + \alpha v$, *luego:* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 2$.

*2º. Si* $Rg(u,v) = 2$ *y* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 2 \Rightarrow \overline{P_1P_2} = \beta u + \alpha v \Rightarrow \overline{P_1P_2} \in L(u,v)$ *o lo que es igual* $u$, $v$ *y* $\overline{P_1P_2}$ *son coplanarios, luego* $r_1$ *y* $r_2$ *se cortan.*

$\overline{P_1P_2} \in L(u) + L(v)$.

**Def 9:**

Se dice que dos subespacios se cruzan si no se cortan ni son paralelos.

**Proposición 5:**

La condición necesaria y suficiente para que dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$ se crucen es: $\begin{cases} S_1 \cap S_2 = \Phi \\ y \\ \dim(L_1 + L_2) > \max(\dim(L_1), \dim(L_2)) \end{cases}$

**Demostración:**

Sabemos que: $\dim(L_1 + L_2) \geq \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$,

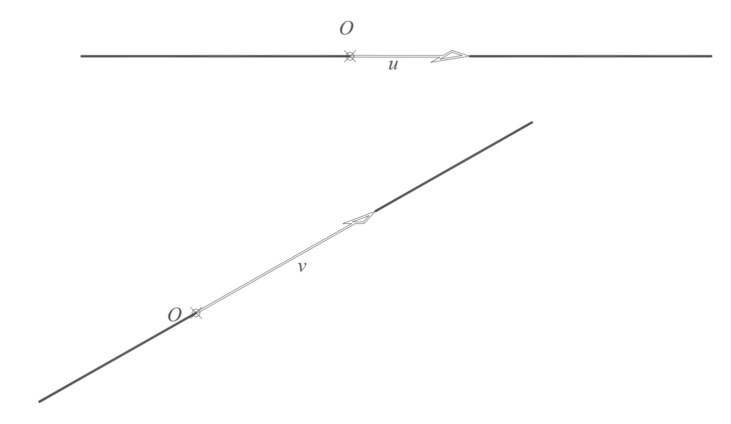
1º.- Si $\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) \Leftrightarrow L_1 + L_2 = L_1 \Leftrightarrow L_2 \subset L_1 \Leftrightarrow$ son paralelos.

2º.- Si son paralelos $\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} L_2 \subset L_1 \\ ó \\ L_1 \subset L_2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = \max(\dim(L_1), \dim(L_2))$.

*Ejemplo 26:*

*En el espacio afín ordinario* $A_3$*:*

- *Sabemos que si dos rectas* $r_1 = P_1 + L(u)$ *y* $r_2 = P_2 + L(v)$ *se cortan se verifica que* $Rg(u,v) = 2$ *y* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 2$, *la condición necesaria y suficiente para que se crucen es que* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 3$.




*Demostración*

*1º.: Si* $r_1$ *y* $r_2$ *se cruzan, no son paralelas y* $Rg(u,v) = 2$, *tampoco son coplanarias y* $\overline{P_1P_2} \notin L(u,v) \Rightarrow \overline{P_1P_2} \neq \beta u + \alpha v$, *luego:* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 3$.

*2º. Si* $Rg(u,v,\overline{P_1P_2}) = 3 \Rightarrow \overline{P_1P_2} \notin L(u,v)$ *o lo que es igual* $u$ *,* $v$ *y* $\overline{P_1P_2}$ *no son coplanarios y no se cortan, como* $Rg(u,v) = 2$ *no son paralelas, luego* $r_1$ *y* $r_2$ *se cruzan.*

**Subespacio suma:**

Sean dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$, sabemos que la unión de subespacios afines no es subespacio afín, queremos encontrar el menor de los subespacios afines contenido en la unión, dicho subespacio tiene que estar formado, además de por los vectores de ambos subespacios, por vectores que tengan el origen en uno de los subespacios y el extremo en el otro; por tanto el subespacio vectorial asociado será: $L\left(\overline{P_1Q}, \overline{P_2Q}\right)$, siendo $Q \in S_1 \cup S_2$.

Vamos a demostrar que $L\left(\overline{P_1Q}, \overline{P_2Q}\right) = L_1 + L_2 + L\left(\overline{P_1P_2}\right)$, efectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Si } Q \in S_1 \Rightarrow L\left(\overline{P_1Q}\right) = L_1 \\ \text{sabemos: } \overline{P_2Q} = \overline{P_2P_1} + \overline{P_1Q} \end{array}\right\} \Rightarrow L\left(\overline{P_2Q}\right) = L_1 + L\left(\overline{P_2P_1}\right) \\ \left.\begin{array}{l} \text{Si } Q \in S_2 \Rightarrow L\left(\overline{P_2Q}\right) = L_2 \\ \text{sabemos: } \overline{P_1Q} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2Q} \end{array}\right\} \Rightarrow L\left(\overline{P_1Q}\right) = L_2 + L\left(\overline{P_1P_2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow L\left(\overline{P_1Q}, \overline{P_2Q}\right) = L_1 + L_2 + L\left(\overline{P_1P_2}\right)$$

**Def. 10:**

Se define subespacio suma de los subespacios $S_1$ y $S_2$ al subespacio:
$S_1 + S_2 = Q + (L_1 + L_2 + L\left(\overline{P_1P_2}\right)$, donde $Q \in S_1 \cup S_2$.

- Es el menor de los subespacios que contiene a la unión.

***Ejemplo 27:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$*, el subespacio suma de dos rectas que se cortan o de dos rectas paralelas es el plano que las contiene, si se cruzan es todo el espacio.*

**Proposición 6:**

**Teorema de la dimensión en subespacios afines:**

Dados dos subespacios afines $S_1 = P_1 + L_1$ y $S_2 = P_2 + L_2$, se verifica:
$\dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim(S_1) + \dim(S_2)$, se cumple la igualdad solo en dos casos:

1. Si $S_1 \cap S_2 \neq \theta$
2. Si $S_1 \cap S_2 = \theta$ y $L_1 \cap L_2 = \{\underline{0}\}$

***Ejercicio 9:***

*Demostrar el teorema de la dimensión.*

***Ejemplo 28:***

*En el espacio afín* $\Re^4$ *se dan los subespacios siguientes:* $S_1$ *es el conjunto solución del sistema* $\begin{cases} -y + t = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ *.y* $S_2 = (1,2,3,3) + L((1,1,1,0))$ *discutir su posición relativa: buscamos una determinación*

*lineal de* $S_1$ *resolviendo:* $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=3 \\ t=2+\beta \end{cases}$ $;S_1=(0,0,3,2)+L((1,0,0,0),(0,1,0,1))$ *y vemos si los dos espacios son paralelos o no:* $Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=3 \Rightarrow L_1 \not\subset L_2$ *y no son paralelos, por tanto pueden cortarse o cruzarse, comprobamos si* $\overline{P_1P_2}$ *pertenece o no a* $L_1+L_2$ *:*

$$Rg(u,v,w,\overline{P_1P_2})=Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=4 \Leftrightarrow \overline{P_1P_2} \notin L_1+L_2$$ *y se cruzan.*

**Def . 11:**

**Referencia afín:**

Dado un espacio afín $A=(X,V)$ se llama referencia afín a una familia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3,.......e_n\}$ donde:
$O$ es un punto arbitrario de $X$.
$\{e_1,e_{2,}e_3................e_n\}$ es un base de $V$.

Se llama origen al punto $O$ y ejes a $O+L(e_i)$ $\forall i \in \{1,2,3.....n\}$.

- Dado un sistema de referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3,.......e_n\}$ en un espacio afín de dimensión $n$, los puntos $\{A_0,A_1,A_2.....A_n\}$ dados por $A_0=O$ $A_1=O+e_1$, $A_2=O+e_2$, ………… $A_{n1}=O+e_n$ son afinmente independientes y viceversa si un sistema de puntos $\{A_0,A_1,A_2.....A_n\}$ es afinmente independiente, entonces el conjunto: $\{A_{0,}\overline{A_0A_1},\overline{A_0A_2},\overline{A_0A_3}...........\overline{A_0A_n}\}$ es un sistema de referencia.

**Def. 12:**

En un espacio afín de dimensión *n*, a *n+1* puntos afinmente independientes se llama **sistema de referencia baricéntrico**.

**Def . 13:**

**Vector de posición de un punto:**

Fijado el origen $O$, se puede definir la aplicación:

$$g: X \to V$$
$$P \to g(P)=\overline{OP}$$

De modo que a cada punto del espacio se le hace corresponder un vector con origen en $O$ y extremo en $P$ que llamamos vector de posición, en virtud del axioma 3 es una biyección.

- Elegida una base $B_V=\{e_1,e_{2,}e_3................e_n\}$ en el espacio vectorial, sabemos que existe una

biyección entre el espacio vectorial $V$ y $K^n$ siendo $K$ el cuerpo sobre el que está definido el espacio vectorial que asocia a cada vector sus coordenadas respecto de la base dada:

$$f : V \to K^n$$
$$u \to f(u) = (x_1, x_2, x_3........x_n)$$

- Se puede definir la aplicación compuesta:

$$f \circ g : X \to K^n$$
$$P \to (x_1, x_2, x_3.....x_n)$$

A cada punto le corresponderá mediante la composición un único conjunto de escalares (al ser una composición de bisecciones), que llamamos coordenadas del punto respecto de la referencia dada.

**Def . 14:**

**Coordenadas de un punto:**

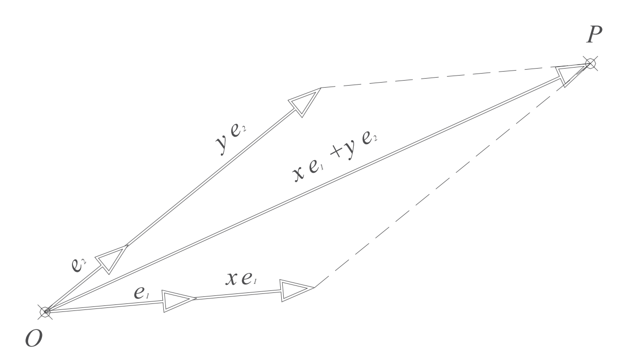
Las coordenadas de un punto respecto de una referencia son las coordenadas de su vector de posición respecto de la base que interviene en dicha referencia.

$$X \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} K^n$$
$$P \longrightarrow \overline{OP} \to (x_1, x_2, x_3.....x_n)$$

En general llamaremos a las coordenadas de un punto con la misma letra con la que se designa el mismo: $Q \equiv (q_1, q_2, q_3 ................q_n)$ y las de un punto genérico del espacio con la notación $(x_1, x_2, x_3.....x_n)$.

***Ejemplo 29:***

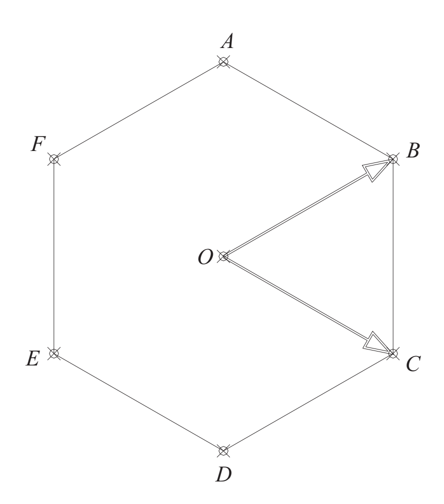
*En el plano afín ordinario $A_2$ una referencia afín es: $\Re = \{O, e_1, e_2\}$ donde los vectores $e_1$ y $e_2$ son dos vectores libres no colineales:*




*En el plano afín ordinario utilizaremos indistintamente la notación anterior $(x_1, x_2)$ y la mas habitual en las enseñanzas medias: $(x, y)$.*

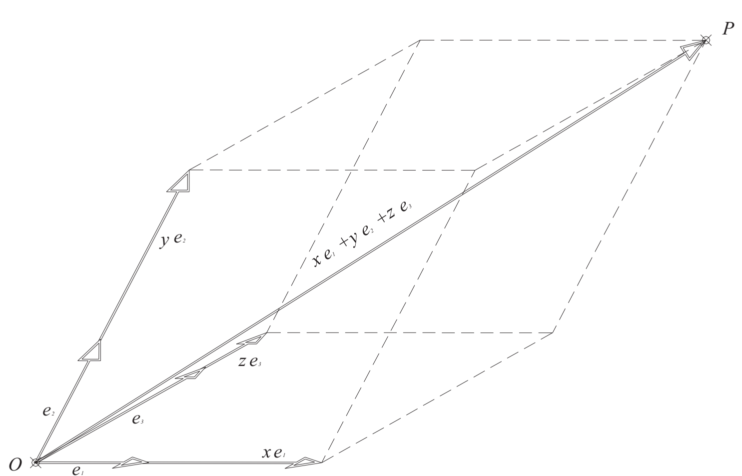
***Ejercicio 10:***

*En el plano afín ordinario se considera un exágono regular $ABCDEF$ y una referencia afín $\Re = \{O, \overline{OB}, \overline{OC}\}$, siendo O el centro del exágono, hallar las coordenadas de todos los vértices del hexágono y de los vectores situados sobre sus lados.*




***Ejemplo 30:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$ *una referencia afín es:* $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ *donde los vectores* $e_1$, $e_2$ *y* $e_3$ *son tres vectores libres no coplanarios:*




*En el espacio afín ordinario utilizaremos indistintamente la notación anterior* $(x_1, x_2, x_3)$ *y la mas habitual en las enseñanzas medias:* $(x, y, z)$.

***Ejemplo 31:***

*En el espacio afín* $\Re^4$ *se da el punto* $O = (1,0,1,1)$ *y los vectores* $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (1,1,0,1)$, $e_3 = (1,1,1,1)$ *y* $e_4 = (1,1,10)$, *comprobar que* $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *es una referencia afín y hallar las coordenadas del punto* $P = (1,2,2,3)$ *respecto de dicha referencia:*

$$Rg(e_1, e_2, e_3, e_4) = Rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow$$ *los vectores son linealmente independientes, son una base de* $\Re^4$ *y es referencia afín. El vector de posición es:* $\overline{OP} = (1,2,2,3) - (1,01,1) = (0,2,1,2)$ *y sus coordenadas*

*respecto de la base:* $(0,2,1,2)=\alpha_1(1,0,0,0)+\alpha_2(1,1,0,1)+\alpha_3(1,1,1,1)+\alpha_4(1,1,1,0)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-2\\ \alpha_2=1\\ \alpha_3=1\\ \alpha_4=0\end{cases}$ *, que son las coordenadas pedidas,* $P\equiv(-2,1,1,0)$

**Proposición 7:**

Sea un espacio afín $A=(X,V)$ y una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3,.......e_n\}$, las coordenadas de un vector $\overline{PQ}$ son las coordenadas del extremo menos las del origen.

**Demostración:**

Llamemos a las coordenadas del extremo y del origen respecto de la referencia dada: $P\equiv(p_1,p_2,p_3................p_n)$ y $Q\equiv(q_1,q_2,q_3................q_n)$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{OQ}\Rightarrow\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}\\ \text{Por definición de coordenadas : }\begin{cases}\overline{\text{OP}}=\sum_1^n p_ie_i\\ \overline{\text{OQ}}=\sum_1^n q_ie_i\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{PQ}=\sum_1^n q_ie_i-\sum_1^n p_ie_i\Leftrightarrow\overline{PQ}=\sum_1^n(q_i-p_i)e_i$$

Luego las coordenadas del vector son: $\overline{PQ}\equiv(q_1-p_1,q_2-p_2,q_3-p_3.................q_n-p_n)$

**Proposición 8:**

Sea un espacio afín $A=(X,V)$ y una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3,.......e_n\}$, las coordenadas del punto $Q$ resultado de la acción un vector $u$ sobre el punto $P$ son la suma coordenadas del punto $Q$ y las del vector $u$ .

**Demostración:**

Llamemos a las coordenadas del punto y del vector respecto de la referencia dada: $P\equiv(p_1,p_2,p_3................p_n)$ y $u\equiv(u_1,u_2,u_3................u_n)$

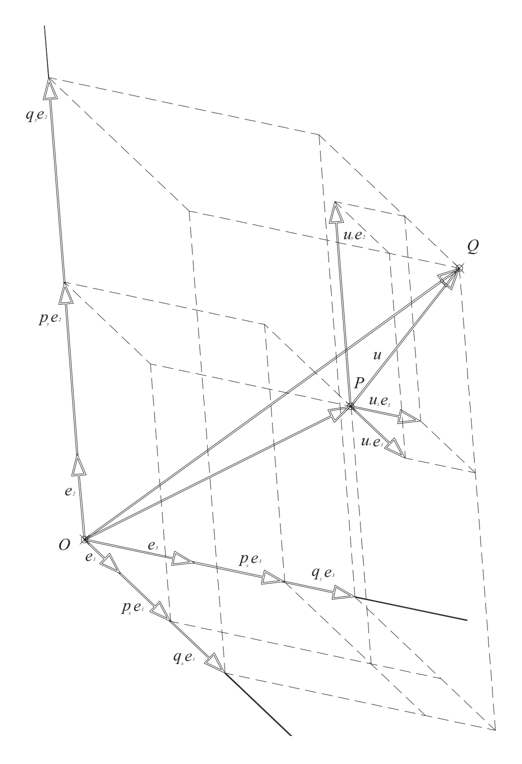
$$\left.\begin{array}{l}\overline{OQ}=\overline{O(P+u)}=\overline{OP}+u\\ \text{Por definición de coordenadas : }\begin{cases}\overline{\text{OP}}=\sum_1^n p_ie_i\\ u=\sum_1^n u_ie_i\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{OQ}=\sum_1^n p_ie_i+\sum_1^n u_ie_i\Leftrightarrow\overline{OQ}=\sum_1^n(p_i+u_i)e_i$$

Luego las coordenadas del punto $Q$ son: $Q\equiv(p_1+u_1,p_2+u_2,p_3+u_3.................p_n+u_n)$

***Ejemplo 32:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$*:*

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP}+\overline{PQ}=\overline{OQ}\Rightarrow\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}\\ \overline{OQ}=q_xe_1+q_ye_2+q_ze_3\\ \overline{OP}=p_xe_1+p_ye_2+p_ze_3\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{PQ}=(q_x-p_x)e_1+(q_y-p_y)e_2+(q_z-p_z)e_3$$




*Además si hacemos* $u = \overline{PQ}$*:*

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OQ} \\ \overline{PQ} = u = u_x e_1 + u_y e_2 + u_z e_3 \\ \overline{OP} = p_x e_1 + p_y e_2 + p_z e_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OQ} = (p_x + u_x)e_1 + (p_y + u_y)e_2 + (p_z + u_z)e_3$$

**Cambio de referencia afín:**

En el espacio afín $A = (X, V)$ se consideran las referencias afines: $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3, .......e_n\}$ y $\Re' = \{O', e_1', e_2', e_3', .......e_n'\}$, llamamos a las coordenadas de un punto genérico $P \in X$, $P \equiv (x_1, x_2, x_3 ................x_n)$ en $\Re$ y $P \equiv (x_1', x_2', x_3' ................x_n')$ en $\Re'$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Por definición de coordenadas}: \begin{cases} \overline{\text{OP}} = \sum_1^n x_i e_i \\ \overline{\text{O'P}} = \sum_1^n x_j' e_j' \end{cases} \\ \text{Por la propiedad triangular}: \overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^n x_i e_i = \overline{OO'} + \sum_1^n x_j' e_j'$$

Si conocemos las coordenadas de la referencia $\Re'$ respecto de la referencia $\Re$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Coordenadas del origen}: O' \equiv (b_1, b_2, b_3 ....b_n) \Leftrightarrow \overline{\text{OO'}} = \sum_1^n b_i e_i \\ \text{Coordenadas de los vectores}: \begin{cases} e_j' \equiv (a_{i,j}, a_{2,j}, a_{2,j} ....a_{n,j}) \Leftrightarrow e_j' = \sum_1^n e_i a_{ij} \\ \forall j \in 1,2,3.........n \end{cases} \\ \sum_1^n x_i e_i = \overline{OO'} + \sum_1^n x_j' e_j' \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^n x_i e_i = \sum_1^n b_i e_i + \sum_1^n \sum_1^n e_i a_{ij} x_j'$$

Igualando coeficientes obtenemos: $\begin{cases} x_1 = b_1 + \sum_1^n a_{1,j} x_j' \\ x_2 = b_2 + \sum_1^n a_{2,j} x_j' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = b_n + \sum_1^n a_{n,j} x_j' \end{cases}$ que son las ecuaciones de cambio

de referencia, matricialmente: $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, $X = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \mathrm{B} & \mathrm{P} \end{array}\right) X'$.

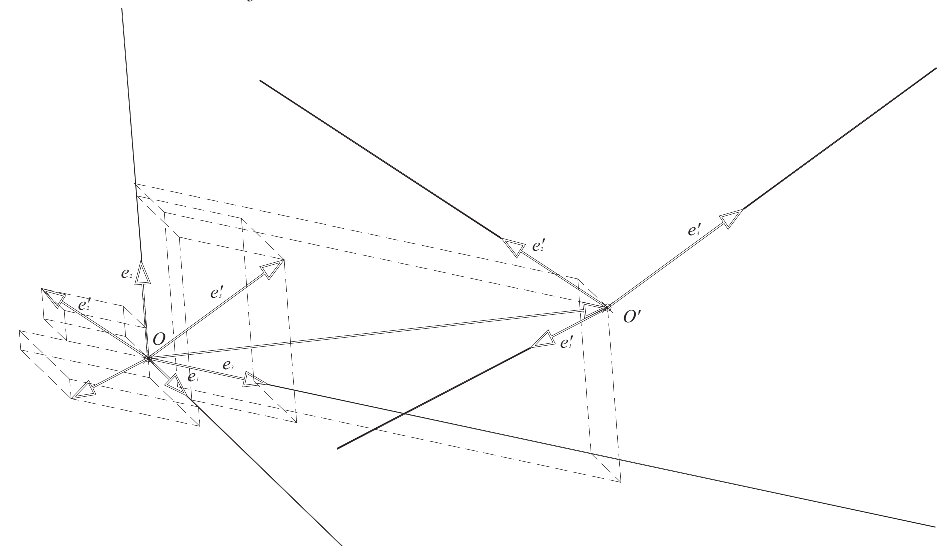
- La matriz $P$ es la matriz de paso de la base de la primera referencia a la base de la segunda y por tanto es inversible, como consecuencia también lo es la matriz de bloques.

***Ejercicio 11:***

*En el plano afín ordinario se considera un hexágono regular del ejercicio 9, escribir las ecuaciones del cambio de la referencia* $\Re = \{O, \overline{OB}, \overline{OC}\}$ *a la referencia ,* $\Re' = \{E, \overline{ED}, \overline{EF}\}$ *y hallar las coordenadas de todos los vértices del hexágono y de los vectores situados sobre sus lados en la nueva referencia.*

***Ejemplo 33:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$*:*




*Vamos a hallar las ecuaciones del cambio de la referencia* $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ *a la referencia* $\Re' = \{O', e_1', e_2', e_3'\}$.

*Sean las coordenadas del origen* $O' \equiv (b_1, b_2, b_3)$ *si llamamos a las coordenadas de un punto genérico* $P \in X$*,* $P \equiv (x, y, z)$ *en* $\Re$ *y* $P \equiv (x', y', z')$ *en* $\Re'$*, por la propiedad triangular tenemos:* $\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$ *y como las coordenadas de un punto son las de su vector de posición:*

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + (x'e_1' + y'e_2' + z'e_3').$$

*Conociendo los vectores de la base de* $\Re'$ *referidos de la base de* $\Re$*,* $e_1' = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$*,* $e_2' = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3$*,* $e_3' = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$ *y sustituyendo en la expresión anterior tenemos:*

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 = (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3) + (x'(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3) + y'(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3) +$$
$$+ z'(a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3))$$ *que es la expresión vectorial, igualando coeficientes:*

$$\begin{cases} x = b_1 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y = b_2 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z = b_3 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$ *que son las ecuaciones de cambio de referencia, matricialmente:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

**Ecuaciones paramétricas de un subespacio afín:**

En un espacio afín $A = (X, V)$ referido a una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3, .......e_n\}$, sea $S = P + L = \{A \in X / \overline{PA} \in L\}$ un subespacio afín, $(p_1, p_2, p_3.....p_n)$ las coordenadas del punto $P$ y $B_L = \{u_1, u_2, u_3.....u_m\}$ una base del subespacio vectorial asociado $L$, las coordenadas de los vectores de la base respecto a la referencia dada las llamamos: $u_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}.....a_{nj}), \forall j \in (1,2,3.....m)$. Sea un punto genérico $A$ de coordenadas: $(x_1, x_2, x_3.................x_n)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P \equiv (p_1, p_2, p_3...p_n) \Leftrightarrow \overline{OP} = \sum_1^n p_ie_i \\ A \equiv (x_1, x_2, x_3...x_n) \Leftrightarrow \overline{OA} = \sum_1^n x_ie_i \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PA} = \sum_1^n (x_i - p_i)e_i \\ \left.\begin{array}{l} \text{Si } A \in S \Leftrightarrow \overline{PA} = \sum_1^m \lambda_j u_j \\ \text{Sabemos}: \text{u}_\text{j} = \sum_1^n e_j a_{ij}, \forall j \in (1,2,3...m) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PA} = \sum_1^n \sum_1^m e_i a_{ij} \lambda_j \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_1^n (x_i - p_i)e_i = \sum_1^n \sum_1^m e_i a_{ij} \lambda_j$$

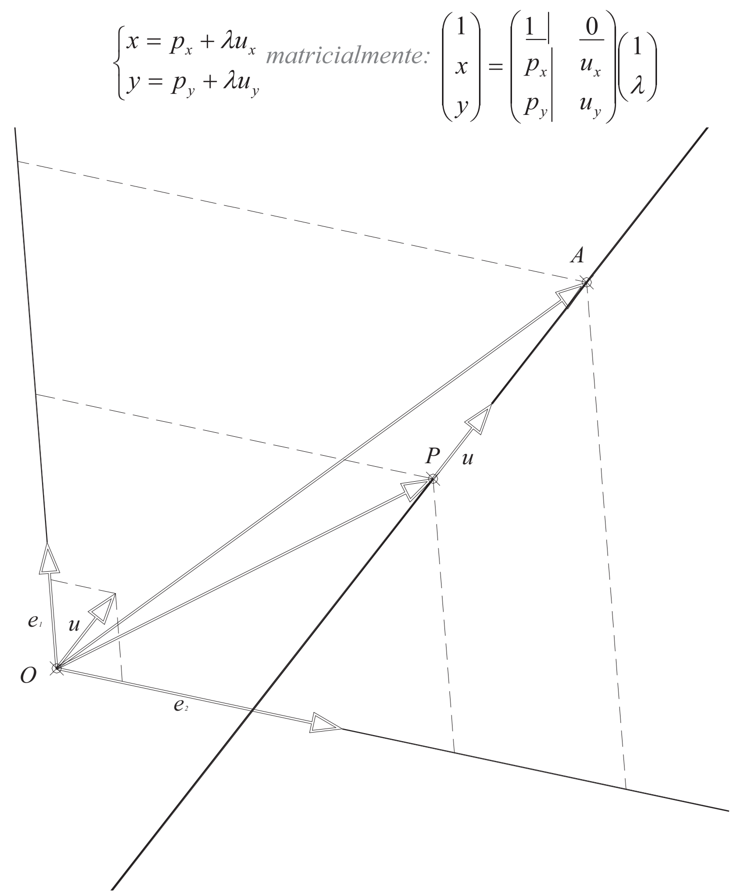
Igualando coeficientes y dejando en el primer término las coordenadas de $A$:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \sum_1^m a_{1j}\lambda_j \\ x_2 = p_2 + \sum_1^m a_{2j}\lambda_j \\ .......................... \\ .......................... \\ x_n = p_n + \sum_1^m a_{nj}\lambda_j \end{cases}$$ matricialmente: $$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \hline p_1 & a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ : & : & : & ::: & : \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ : \\ \lambda_m \end{pmatrix} \quad X = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \text{P} & \text{A} \end{array}\right)\Lambda$$

***Ejemplo 34:***

*En el plano afín ordinario* $A_2$ *las ecuaciones de la recta* $r = P + L(u)$*, establecida una referencia* $\Re = \{O, e_1, e_2\}$ *serán :*

$$\begin{cases} x = p_x + \lambda u_x \\ y = p_y + \lambda u_y \end{cases} \quad \textit{matricialmente:} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p_x & u_x \\ p_y & u_y \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$




*Obtenidas por el mismo razonamiento que en el apartado anterior:*

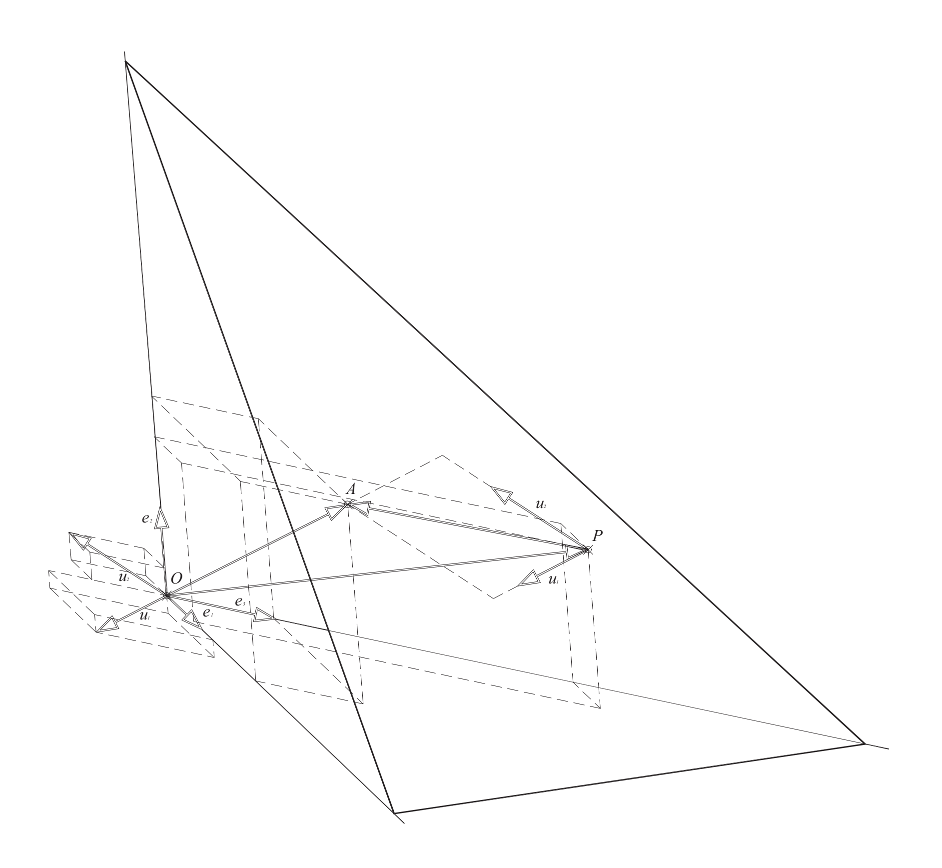
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} P \equiv (p_x, p_y) \Leftrightarrow \overline{OP} = p_x e_1 + p_y e_2 \\ A \equiv (x, y) \Leftrightarrow \overline{OA} = x e_1 + y e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PA} = (p_x - x)e_1 + (p_y - y)e_2 \\ \left.\begin{array}{r} \text{Si } A \in r \Leftrightarrow \overline{PA} = \lambda u \\ \text{Sabemos : u} = u_x e_1 + u_y e_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PA} = \lambda(u_x e_1 + u_y e_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_x - x)e_1 + (p_y - y)e_2 = \lambda(u_x e_1 + u_y e_2) \Rightarrow x e_1 + y e_2 = (p_x + \lambda u_x)e_1 + (p_y + \lambda u_y)e_2$$

*E igualando coeficientes se obtienen las ecuaciones dadas.*

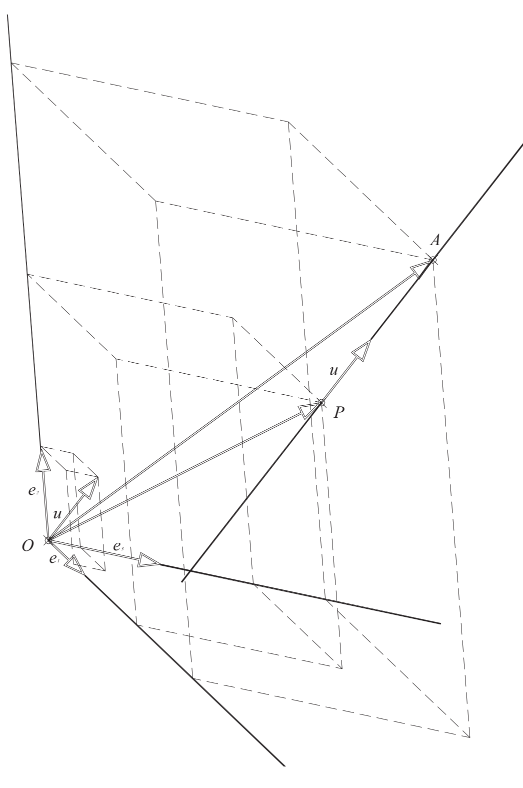
***Ejercicio 12:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$ *obtener las ecuaciones del plano* $\pi = P + L(u, v)$*, establecida una referencia* $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3\}$.




*Ejercicio 13:*

*En el plano espacio ordinario* $A_3$ *obtener las ecuaciones e la recta* $r = P + L(u)$*, establecida una referencia* $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3\}$.



**Ecuaciones cartesianas de un subespacio afín:**

En un espacio afín $A=(X,V)$ referido a una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3,......e_n\}$, sea $S=P+L=\{A\in X/\overline{PA}\in L\}$ un subespacio afín y las ecuaciones cartesianas del espacio vectorial asociado $L$ respecto de la referencia dada: $AX=0$, llamemos $(p_1,p_2,p_3.....p_n)$ a las coordenadas del punto $P$ y $(x_1,x_2,x_3................x_n)$ a las de un punto genérico $A$,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P\equiv(p_1,p_2,p_3...p_n)\Leftrightarrow\overline{OP}=\sum_1^n p_ie_i\\ A\equiv(x_1,x_2,x_3...x_n)\Leftrightarrow\overline{OA}=\sum_1^n x_ie_i\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{PA}=\sum_1^n(x_i-p_i)e_i\\ \text{Si } A\in S\Leftrightarrow\overline{PA}\in L \text{ y } \overline{PA} \text{ verifica las ecuaciones de } L\end{array}\right\}\Rightarrow A(X-P)=0\Leftrightarrow AX=AP\\ \text{Si llamamos}: c_i=\sum_1^n a_{ij}p_j,\forall i\in(1,2,.....m)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow AX=C$, que son las ecuaciones cartesianas del subespacio $S$ .

- La dimensión del subespacio es el grado de libertad del sistema, es decir el número de incógnitas menos el número de ecuaciones independientes.
- Las ecuaciones paramétricas son la solución del sistema $AX=C$.
- Eliminando los parámetros en las ecuaciones paramétricas se obtienen las ecuaciones cartesianas.

***Ejemplo 35:***

*Sabemos que el plano afín ordinario $A_2$, las ecuaciones de la recta $r=P+L(u)$, establecida una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2\}$ son :* $\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\p_x & u_x\\p_y & u_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda\end{pmatrix}$ *ó* $\begin{cases}x=p_x+\lambda u_x\\y=p_y+\lambda u_y\end{cases}$*, eliminando el parámetro se obtiene:*

$\dfrac{x-p_x}{u_x}=\dfrac{y-p_y}{u_y}\Rightarrow u_yx-u_xy+(-p_xu_y+p_yu_x)=0$*, llamando* $A=u_x$*,* $B=-u_x$ *y* $C=-p_xu_y+p_yu_x$*, resulta* $Ax+By+C=0$ *que es la ecuación cartesiana de la recta.*

***Ejemplo 36:***

*Análogamente, en el espacio afín ordinario $A_3$, para obtener las ecuaciones cartesianas del plano $\pi=P+L(u,v)$, basta con eliminar parámetros.*

*Establecida una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3\}$, las ecuaciones paramétricas son:*

$\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\p_x & u_x & v_x\\p_y & u_y & v_y\\p_z & u_z & v_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ *que podemos escribir:* $\begin{pmatrix}x-p_x\\y-p_y\\z-p_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_x & v_x\\u_y & v_y\\u_z & v_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ *debe verificarse:*

$$\begin{vmatrix}x-p_x & u_x & v_x\\y-p_y & u_y & v_y\\z-p_z & u_z & v_z\end{vmatrix}=0\Rightarrow(x-p_x)(u_yv_z-v_zu_y)+(x-p_y)(v_xu_z-u_xv_z)+(x-p_z)(u_xv_y-v_xu_z)=0$$

*Ordenando y llamando:* $A=u_yv_z-v_zu_y$*,* $B=v_xu_z-u_xv_z$*,* $C=u_xv_y-v_xu_z$ *y*

$D=-p_x(u_yv_z-v_zu_y)-p_y(v_xu_z-u_xv_z)-p_z(u_xv_y-v_xu_z)$ *resulta:* $Ax+By+Cz+D=0$ *que es la ecuación cartesiana del plano.*

***Ejercicio 14:***

*En el espacio afín ordinario* $A_3$ *obtener las ecuaciones cartesianas de la recta* $r=P+L(u)$*, establecida una referencia* $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3\}$*.*

- Al obtener las ecuaciones cartesianas de un subespacio, dependiendo de la posición relativa entre la referencia elegida y el subespacio las ecuaciones varían, para cada sistema de referencia distinto obtendremos un sistema de ecuaciones diferente, pero todos serán equivalentes.

Podemos resolver los ejemplos y ejercicios anteriores analíticamente y si elegimos la referencia adecuada en la resolución se plantearán cálculos sencillos.

*Ejemplo 37:*

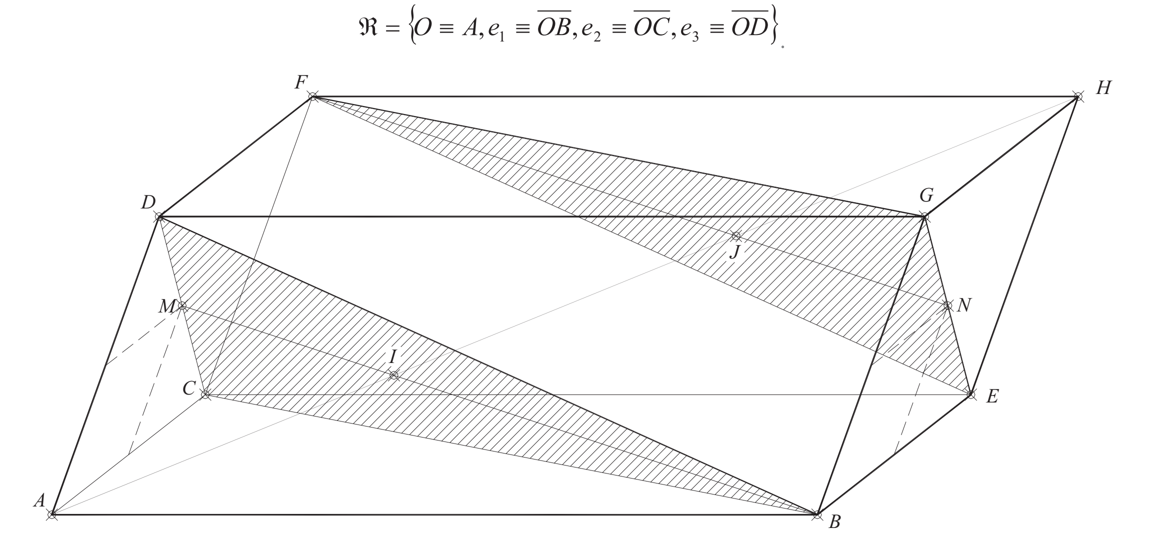
*En el espacio afín ordinario* $A_3$ *demostrar analíticamente que los planos que pasan por los tres vértices contiguos a cada uno de los extremos de una diagonal dividen a esta en tres partes iguales.*

*Demostrar que los puntos de corte entre los planos y la diagonal son los baricentros de los triángulos que determinan las caras del paralelogramo sobre dichos planos.*

*Solución:*

*Elegimos una referencia con el origen en uno de los extremos de la diagonal y los vectores de la base sobre las aristas que convergen en el origen elegido, por ejemplo:*

$$\Re=\{O\equiv A,e_1\equiv\overline{OB},e_2\equiv\overline{OC},e_3\equiv\overline{OD}\}.$$




*Las coordenadas de los vértices del paralelogramo serán:* $A\equiv(0,0,0)$, $B\equiv(1,0,0)$, $C\equiv(0,1,0)$, $D\equiv(0,0,1)$, $E\equiv(1,1,0)$, $F\equiv(0,1,1)$, $G\equiv(1,0,1)$ *y* $H\equiv(1,1,1)$.

*Llamamos* $r$ *a la diagonal* $AH$, $r=A+L(\overline{AH})\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\lambda\Rightarrow\begin{cases}x=y\\x=z\end{cases}$ *que son las ecuaciones cartesianas de* $r$.

*Llamamos* $\pi_1$ *al plano* $BCD$, $\pi_1 = B + L\left(\overline{BC}, \overline{CD}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + z = 1$, *que es la ecuación de* $\pi_1$.

*Llamamos* $\pi_2$ *al plano,* $EFG$, $\pi_2 = E + L\left(\overline{EG}, \overline{EF}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y + z = 2$, *que es la ecuación de* $\pi_2$.

$I$ *es la intersección entre* $r$ *y* $\pi_1$, *resolvemos el sistema:* $\left.\begin{cases} x = y \\ x = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow I = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$,

$J$ *es la intersección entre* $r$ *y* $\pi_2$, *resolvemos el sistema:* $\left.\begin{cases} x = y \\ x = z \\ x + y + z = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow J = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

*Por tanto* $\overline{OI} = \frac{1}{3}\overline{OH}$ *y* $\overline{OJ} = \frac{2}{3}\overline{OH}$.

*Veamos que* $I$ *está situado en la mediana* $BM$ *a un tercio de* $M$ *y dos tercios de* $B$, *las coordenadas de* $M$ *son :* $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{BM} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{BI} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ *y* $\overline{BI} = \frac{2}{3}\overline{BM}$.

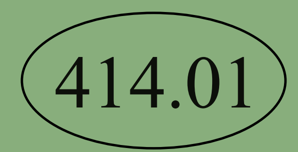
*Veamos que* $J$ *está situado en la mediana* $FN$ *a un tercio de* $N$ *y dos tercios de* $F$, *las coordenadas de* $N$ *son :* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{FN} = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\overline{FJ} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ *y* $\overline{FN} = \frac{2}{3}\overline{FN}$.

***Ejercicio 15:***

*Resolver analíticamente los ejemplos 2, 3, 4, 7 y 8, el ejercicio 2 en el plano afín ordinario* $A_2$ *y los ejercicios 3, 4 y 9 en el espacio afín ordinario* $A_3$.

NOTAS

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

